

DISEÑO DE ACUMULADORES TERMICOS POR CAMBIO DE FASE

L. Saravia[#], E. Alanís[#], L. Rovetta, J. Castro,
I. De Paul, D. de Saravia.

Univerisidad Nacional de Salta
Departamento de Ciencias Exactas
Buenos Aires 177
4400 Salta.

Resumen

Se encuentra la distribución de temperaturas en función del tiempo y la posición a lo largo del acumulador, basándose en un modelo simple que desprecia el calor específico del material, el gradiente térmico en cada elemento de acumulación y la conducción térmica en la dirección del flujo, suponiendo además que la temperatura del aire a la entrada del acumulador se mantiene constante.

Se comparan también las soluciones numéricas y analíticas aproximadas de las ecuaciones que gobiernan la transferencia térmica para cada elemento del acumulador, supuestos de sección cilíndrica, durante la fusión y la solidificación, las cuales son usadas en el dimensionamiento del elemento.

Se discute el diseño de estos acumuladores sobre la base de los resultados obtenidos.

1.- INTRODUCCION.

En el presente trabajo se analizan los distintos aspectos que intervienen en la transferencia térmica entre un flujo de aire y una matriz porosa constituida por un material que experimenta un cambio de fase durante el intercambio de calor. Esto permite elaborar un método de cálculo para el diseño de un acumulador térmico por cambio de fase.

En primer lugar se encuentra el perfil de temperatura dentro del acumulador, como función del tiempo, basándose en un modelo simplificado del mismo, cuya descripción es la siguiente: un lecho poroso, de sección uniforme, constituido por un material con cambio de fase, es atravesado por un flujo de aire en

[#] Investigador del CNEGH

dirección axial que intercambia calor con el material. La temperatura del aire a la entrada del lecho, T_{go} , es constante y el material se encuentra inicialmente a su T_{go} temperatura de fusión T^* . Al comienzo del período de acumulación el material se encuentra en estado sólido y $T_{go} > T^*$. Al comienzo del período de extracción, el material es T_{go} líquido y $T_{go} < T^*$.

Se supone que el flujo de calor entre un elemento de acumulación y el aire circundante está determinado únicamente por el coeficiente convectivo de transferencia en la superficie del elemento, que los calores específicos de ambas fases son despreciables y que no existe conductividad térmica del lecho en la dirección del flujo.

Se obtienen también, expresiones para la velocidad de avance del frente de fusión a lo largo del acumulador y para el calor almacenado en función del tiempo.

En trabajos futuros se espera poder introducir al modelo los parámetros que no han sido tenidos en cuenta aquí.

En segundo lugar, se estudia el problema de la transmisión térmica con cambio de fase dentro de un elemento de acumulación y la transferencia de calor entre éste y el aire circundante a través de la superficie.

Las ecuaciones que gobiernan estos fenómenos son resueltas numéricamente y estos resultados son comparados con los obtenidos mediante una solución analítica aproximada. En este análisis se adopta una geometría cilíndrica para el elemento, es decir: un tubo cilíndrico en cuyo interior se encuentra un material que sufre un cambio de fase, está sumergido en una corriente de aire normal al eje del cilindro, que intercambia calor con él. Sobre la base de estos resultados se discuten las condiciones en que son válidas cada una de las hipótesis en que se basa el modelo simplificado de acumulador discutido anteriormente.

En otro trabajo presentado a esta Reunión, se comparan los resultados de experiencias realizadas con Parafina, con las soluciones numéricas obtenidas aquí, lo que permite el ajuste del modelo teórico del elemento.

Finalmente se esquematiza el procedimiento general de diseño de un acumulador con cambio de fase.

INTEGRACION DE LAS ECUACIONES BASICAS

Una matriz porosa de sección transversal uniforme y área A , tiene su eje a lo largo de la dirección x . La sección de entrada está ubicada en $x=0$ y la de salida en $x=L$. Está constituida por un material con cambio de fase, cuya temperatura de fusión es T^* , calor de fusión λ , y densidad ρ , supuesta la misma para ambas fases. Un flujo axial de aire de gasto másico G , atraviesa la matriz e intercambia calor con ella siendo el coeficiente convectivo volumétrico h_v y la temperatura del aire a la entrada, T_{g0} , constante.

Considerando una sección de matriz entre x y $x+dx$, las ecuaciones para la transferencia térmica entre el material y el aire son:

$$\frac{\partial}{\partial x} T_g(x, z) = \beta (T^* - T_g(x, z)) \quad \text{con: } \beta = A \cdot h_v / G \cdot c_g \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \eta(x, z) = \gamma (T_g(x, z) - T^*) \quad \text{con: } \gamma = h_v / \lambda \rho (1-f) \quad (2)$$

donde c_g es el calor específico del aire, $T_g(x, z)$ la temperatura del aire, f la fracción de vacíos de la matriz, $\eta(x, z)$ el porcentaje de material fundido, y z el tiempo.

El avance del frente de fusión dentro del acumulador, está dado por la condición $\eta(x, z) = 1$, que define implícitamente las funciones:

$$x = x_f(z) \quad \text{o} \quad z = z_f(x).$$

En el instante inicial, $z=0$, el aire dentro del acumulador adoptará un perfil de temperaturas, $T_g(x, 0)$, que se mantendrá estacionario durante el tiempo z_0 , que tarda en completarse el cambio de fase en la sección de entrada. O sea:

$$T_g(x, z) = T_g(x, 0) \quad \text{para } 0 < z < z_0$$

que junto con:

$$\begin{aligned} T_g(0, z) &= T_{g0} && \text{para } x = 0 \\ \eta(x, 0) &= 0 && \text{para } z = 0 \\ \eta(x, z) &= 1 && \text{para } x = x_f(z) \end{aligned} \quad (2)$$

constituyen las condiciones de borde.

La integración de (1) entre $x=0$ y x , conduce a la expresión para el perfil inicial de temperaturas:

$$T_g(x, 0) - T^* = (T_{g0} - T^*) \exp(-\beta x) ; \quad (3)$$

La ecuación (3) es válida en el intervalo $(0 < \tau < \tau_0)$.
 Teniendo en cuenta que en $x=0$, $T(0, \tau) = T_{go}$ y que $\eta(0, \tau_0) = 1$,
 puede integrarse la ecuación (2) entre $\tau=0$ y $\tau=\tau_0$ para ob-
 tener la expresión de τ_0 :

$$\tau_0 = \lambda \rho (1 - f) / h_v (T_{go} - T^*) \quad (4)$$

Para hallar el perfil de temperaturas para $\tau > \tau_0$, debe tenerse
 en cuenta que la condición $T_g(x, \tau) = T_{go}$ se cumple en $x = x_f(\tau)$.

Entonces, integrando (1) entre $x_f(\tau)$ y x , se obtiene:

$$T_g(x, \tau) - T^* = (T_g(x_f, 0) - T^*) \exp(\beta x_f(\tau)) \quad (5)$$

donde queda por conocer $x_f(\tau)$. Esta función se obtiene integra-
 do (2) entre $\tau=0$ y τ .

Así:

$$\eta(x, \tau) = \int_0^\tau \gamma (T_g(x, \tau') - T^*) d\tau' \quad (6)$$

Si el límite superior es $\tau_f(x)$, entonces $\eta(x, \tau) = 1$. Derivando la
 expresión resultante en (6), y evaluando en $x = x_f(\tau)$, se obtiene
 la ecuación:

$$\frac{dx_f(\tau)}{d\tau} = \gamma \frac{(T_{go} - T^*)}{\beta} = \text{constante.}$$

esto es, por definición, la velocidad del frente de fusión, v_f .
 De allí se obtiene:

$$x_f(\tau) = v_f \cdot (\tau - \tau_0) \quad (7)$$

Reemplazando (7) en (5) se obtiene la expresión definitiva para
 la distribución de temperaturas:

$$T_g(x, \tau) - T^* = (T_{go} - T^*) \exp(-\beta x + \frac{\tau - \tau_0}{\tau_0}) \quad (8)$$

La representación gráfica de esta función se da en la figura 2,
 donde se han utilizado los siguientes parámetros adimensionales

$$\left. \begin{aligned} \alpha(x, \tau) &= [T_g(x, \tau) - T^*] / [T_{go} - T^*] \\ \theta &= \tau / \tau_0 \\ \Gamma &= \beta x \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Que reemplazados en la ecuación (8), dan la siguiente expresión:

$$\alpha(x, \tau) = \exp(-\Gamma + \theta - 1) \quad \text{para } \tau_0 < \tau < \tau_f \quad (10)$$

Si se efectúa la integración en (6), se obtiene la expresión para $\eta(x,z)$, fracción de material fundido, la que coincide con la temperatura adimensionada: $\eta(x,z) \equiv \alpha(x,z)$.

El calor almacenado en el acumulador al cabo de un tiempo τ , viene dado por la diferencia entre el calor que entra al acumulador y el calor que sale del acumulador durante ese tiempo. El máximo calor acumulable, o sea la capacidad térmica del acumulador es

$$Q_M = \lambda \rho (1 - f) V, \text{ donde } V = AL \text{ es el volumen total.}$$

La relación entre el calor acumulado al tiempo τ , y el máximo calor acumulable, viene dado por:

$$Q_a / Q_M = 1 / \beta L (\theta - \exp(-\Gamma + \theta - 1)) \quad (11).$$

3-DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN EL ELEMENTO

El cálculo analítico del acumulador, expuesto en la sección anterior, ha sido posible gracias a la introducción de varias hipótesis simplificatorias, cuyo grado de aproximación es necesario verificar. Una de ellas supone todo el elemento a temperatura uniforme igual a la temperatura de fusión T^* . En realidad, las conductividades térmicas del sólido y del líquido imponen caídas de temperatura dentro del elemento, especialmente durante el enfriamiento en el que se produce una capa sólida sobre las paredes del elemento, que puede ser importante frente a la producida en la capa convectiva de aire. En esta sección se planteará el problema en su forma más sencilla y se le dará solución por una vía analítica aproximada. En la próxima sección se discutirán algunos fenómenos físicos que deben tenerse en cuenta en el modelo de acuerdo a las experiencias realizadas y se le dará solución en forma numérica.

Hasta este momento no se ha especificado la forma del elemento acumulador. Con el fin de realizar los cálculos, se supondrá que es un cilindro de sección circular de radio R , colocado normalmente al flujo según se esquematiza en la figura 2. Si por ejemplo, se plantea el enfriamiento, en el instante inicial todo el elemento está líquido a una temperatura T_0 mayor que T^* . En una primera etapa, el líquido se enfriará, siendo regido el fenómeno por la ecuación de conducción:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\alpha_l}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (12)$$

donde α_l es la difusividad del líquido y $T(r, z)$ la temperatura en el instante z y en la posición r . La condición de borde está impuesta por el aire que circula alrededor del elemento con temperatura T_∞ y la transferencia convectiva que realizará con un coeficiente h_s :

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_s (T - T_\infty) \quad \text{en } r = R$$

En una segunda etapa, comenzará el cambio de fase solidificándose se el material en la periferia del elemento, estando dado la posición del frente de fusión por $r^*(z)$. En ambas fases, la conducción se regirá por la ecuación (12), con las difusividades respectivas α_l y α_s .

En la posición del cambio de fase se tendrá:

$$k_s \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_s - k_l \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_l = \rho \lambda \frac{dr^*}{dz} \quad (13)$$

Los trabajos realizados sobre la resolución de estas ecuaciones son numerosos (1,2,3). Con el fin de obtener una solución analítica que permita un estudio sencillo del problema planteado, se utilizará la solución propuesta en (3). En ella se simplifica el planteo al máximo, suponiendo que la primera etapa no existe y el elemento parte del estado líquido a la temperatura T^* .

Así se evita el estudio del enfriamiento inicial y de la conducción en el líquido. De esta manera, la ecuación (13) se simplifica al eliminarse el segundo término del primer miembro.

Se adimensionalizan las distintas variables y parámetros, definiendo:

$$F_0 = \frac{\alpha z}{R^2} \quad ; \quad \eta = \frac{r}{R} \quad ; \quad \eta^* = \frac{r^*}{R} \quad ; \quad \theta = \frac{-T + T^*}{-T_\infty + T^*}$$

$$S = \frac{c}{\lambda} (T^* - T_\infty) \quad ; \quad B = \frac{h_s R}{k}$$

Para resolver el problema se emplea el método de Megerlin que desarrolla la temperatura adimensionalizada en serie de potencia de $\ln(\eta/\eta^*)$. Aplicando las condiciones de contorno dadas se obtienen las siguientes expresiones para la velocidad con que se mueve la frontera entre ambas fases, $\dot{\eta}^*$, y la distribución de θ :

temperaturas dentro de la capa sólida, Θ , teniendo como parámetro la posición de la frontera, η^* , y a través de esta, del tiempo, τ :

$$\dot{\eta}^* = \frac{-2SB}{\eta^* \left\{ (1-B \ln \eta^*) + \sqrt{(1-B \ln \eta^*)^2 - 2SB \ln \eta^* (2-B \ln \eta^*)} \right\}} \quad (14)$$

$$\Theta(\eta, \eta^*) = B \ln \left(\frac{\eta}{\eta^*} \right) \left\{ (1-B \ln \eta^*) + \sqrt{(1-B \ln \eta^*)^2 - 2SB \ln \eta^* (2-B \ln \eta^*)} \right\}^{-1} + 3B^2 \left[\ln \left(\frac{\eta}{\eta^*} \right) \right]^2 \left\{ (1-B \ln \eta^*) + \sqrt{(1-B \ln \eta^*)^2 - 2SB \ln \eta^* (2-B \ln \eta^*)} \right\}^{-2} + \dots \quad (15)$$

Estas soluciones son aproximadas ya que se obtienen considerando sólo los dos primeros términos de un desarrollo en serie. La expresión (14), permite calcular el tiempo que tarda en fundirse un elemento de radio R:

$$\dot{\eta}^* = d\eta^*/dF_0 \quad \therefore F_0 = - \int_0^1 \frac{d\eta^*}{\dot{\eta}^*}$$

Esta integral fué evaluada numéricamente para distintos valores de R y de $\Delta T = T^* - T_\infty$. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 2.

SOLUCION NUMERICA

En los problemas de conducción de calor con cambio de fase (fusión o congelación) se supone, en general, que existe una temperatura definida de fusión T^* y se tiene una fase líquida para temperatura $T > T^*$, una fase sólida para $T < T^*$, y una superficie de separación de ambas fases (frente de cambio de fase) que las separa netamente. Para muchas sustancias (como el agua) el modelo funciona bien, pero para otras no es tan fácil decidir por cual es la temperatura de fusión porque más bien hay un rango de temperatura en el que ocurre la misma (este parece ser el caso para la parafina). Según Bonacina y otros (4) este hecho sugirió aproximar el problema de cambio de fase a temperatura definida por otro de conducción de calor exclusivamente; en esta aproximación el efecto del calor latente se consigue aumentando el calor específico en un intervalo que incluye la temperatura de fusión; la idea fue propuesta por (5, 6), utilizada en cálculos numéricos por (7, 8, 9, 10) y justificada en ciertas condiciones matemáticamente por (11, 12, 13, 14), los cálculos resultantes resultan engorrosos debido a la inevitable

dependencia del calor específico con la temperatura. Para el cálculo que nos interesa se ha seguido en líneas generales el trabajo de Bonacina y otros (4), adaptándolo a otra geometría y a otras condiciones de borde:

1°) El problema de conducción del calor con cambio de fase se planteó como otro de conducción de calor exclusivamente, con calor específico volumétrico c y conductividad k que cumplen:

$$c(T) \begin{cases} c_s & \text{si } T < T^* - \Delta T \\ \frac{c_s + c_l}{2} + \frac{\lambda}{2\Delta T} & \text{si } T^* - \Delta T \leq T \leq T^* + \Delta T \\ c_l & \text{si } T > T^* + \Delta T \end{cases}$$

$$k(T) \begin{cases} k_s & \text{si } T < T^* - \Delta T \\ k_s + \frac{k_s - k_l}{2\Delta T} (T - T^* + \Delta T) & \text{si } T^* - \Delta T \leq T \leq T^* + \Delta T \\ k_l & \text{si } T > T^* + \Delta T \end{cases}$$

donde c_s y c_l son los calores específicos volumétricos del sólido y líquido, λ calor latente volumétrico, ΔT el semiintervalo donde "distribuye" el calor latente y k_s y k_l conductividades del sólido y líquido.

La condición de conducción del calor se expresó (adoptando al caso de simetría cilíndrica):

$$r c(\tau) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[r k(\tau) \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad \text{para } 0 < r < R$$

$$\text{y } \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

(cabe hacer notar que aunque se usó $c_s = c_s \rho_s$ y $c_l = c_l \rho_l$ en realidad la ecuación anterior no será válida si la densidad no fuera siempre la misma).

La condición de convección a un medio de temperatura uniforme T_∞ y coeficiente de convección h

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = h (T_\infty - T_s)$$

La condición de temperatura inicial constante:

$$T(t=0) = T_I \quad 0 \leq r \leq R$$

El problema aproximado se resolvió a su vez en forma aproximada mediante un esquema en diferencias finitas entre niveles de tiempo que tiene la ventaja de que los coeficientes del sistema de ecuaciones resultante dependen únicamente de temperaturas ya conocidas; el esquema puede interpretarse como la aplicación de balances térmicos a anillos cilíndricos como sugiere la figura. Los coeficientes son las temperaturas en $n+1$ puntos igualmente espaciados sobre el radio a instantes separados por Δt ; se designa con T_i^h la temperatura en el instante h de los puntos a distancia $r_i = (n-i) \cdot R/n$ del eje del cilindro. (Las temperaturas en cada instante se calculan en este esquema a partir de las temperaturas en los dos instantes anteriores); llamando:

$$r_i = \frac{n-i}{n} R, \quad i = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 1.5, 2, \dots, n$$

$$\bar{T}_\infty^h = \frac{T_\infty^{h-1} + T_\infty^h + T_\infty^{h+1}}{3} \quad \text{temperatura ambiente}$$

$$\bar{T}_i^h = \frac{T_i^{h-1} + T_i^h + T_i^{h+1}}{3}$$

$$k_i^+ \quad \text{conductividad a la temperatura } \frac{T_i^h + T_{i+1}^h}{2}$$

$$k_i^- \quad \text{" " " " } \frac{T_i^h + T_{i-1}^h}{2}$$

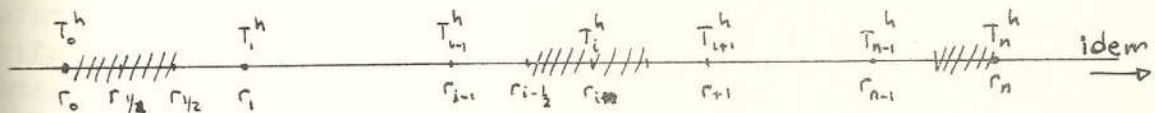
$$c_i \quad \text{calor específico volumétricos } T_i^h$$

$$T_b^h = \frac{3T_0^h + T_1^h}{4} \quad \text{temperatura media del anillo del borde}$$

$$C_b = \text{calor esp. volumétrico a } T_b^h$$

se plantea

$$\Delta R = \frac{R}{n}$$



Balance para anillo exterior:

$$h r_o (\tilde{T}_\infty^h - \tilde{T}_o^h) - k_o^+ r_{1/2} \left(\frac{\tilde{T}_o^h - \tilde{T}_1^h}{\Delta r} \right) = \frac{C_o^*}{2 \Delta t} r_{1/2} \frac{\Delta r}{2} (T_b^{h+1} - T_b^{h-1})$$

Balance para anillos intermedios:

$$k_i^- r_{i-1/2} \left(\frac{\tilde{T}_{i-1}^h - \tilde{T}_i^h}{\Delta r} \right) - k_i^+ \left(\frac{\tilde{T}_i^h - \tilde{T}_{i+1}^h}{\Delta r} \right) = \frac{C_i}{2 \Delta t} r_i \Delta r (T_i^{h+1} - T_i^{h-1})$$

Balance para cilindro central:

$$k_n^- r_{n-1/2} \left(\frac{\tilde{T}_{n-1}^h - \tilde{T}_n^h}{\Delta r} \right) = \frac{1}{2} C_n / 2 \Delta t \left(\frac{\Delta r}{2} \right)^2 (T_n^{h+1} - T_n^{h-1})$$

Como inconvenientes del esquema usado cabe mencionar:

a) Al trabajar con tres niveles de tiempo es necesario conocer las temperaturas a lo largo del radio en dos instantes sucesivos separados por el Δt del cálculo, por lo que habrá que recurrir a otros métodos para calcular otro perfil de temperaturas a partir del perfil inicial; tres posibilidades fueron planteadas:

- i) otro esquema en diferencias finitas en dos niveles de tiempo
- ii) desarrollo en serie de funciones $J_0 \left(\alpha_n \frac{r}{R} \right)^*$ del perfil inicial y cálculo analítico del perfil adicional necesario.
- iii) repetición del perfil inicial.

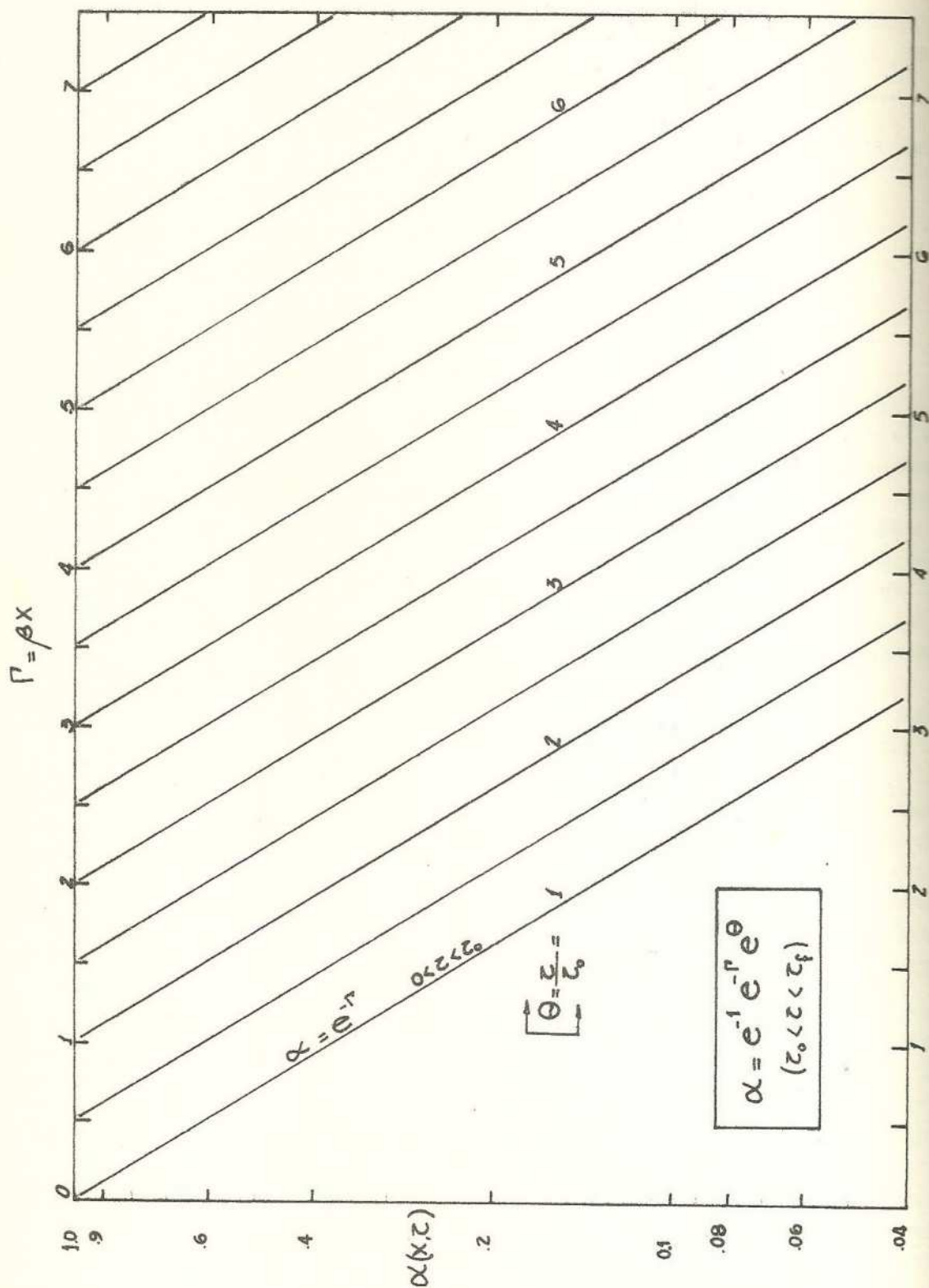
Las tres presentan inconvenientes; la primera porque en realidad ningún esquema en diferencias finitas es realmente aplicable desde $t = 0$ si las $\partial T / \partial t$ no son continuas hasta $t = 0$; la segunda porque exige que k , h y T_∞, c , sean constantes, al menos para las temperaturas de trabajo y porque necesariamente habrá que truncar la serie; finalmente se eligió la tercera porque a pesar de que introduce un error, era mucho más simple que las otras dos y comenzando a trabajar con intervalos Δt pequeños se obtenían resultados comparables a los del desarrollo en serie.

b) los cálculos hechos con k , c y h constantes dan bien comparados con los obtenidos trabajando directamente con el desarrollo en serie (sin diferencias finitas); pero cuando entra en juego la discontinuidad de c aparecen oscilaciones que, si bien se amortiguan cuando todo el cilindro vuelve a estar a temperaturas que corresponden a igual c , pueden hacer aparecer cosas extrañas, por ejemplo que durante el enfriamiento de un cilindro inicialmente a temperatura T_I uniforme, con un flujo de calor hacia un medio de temperatura constante $T_\infty < T_I$ aparezcan perfiles de tem-

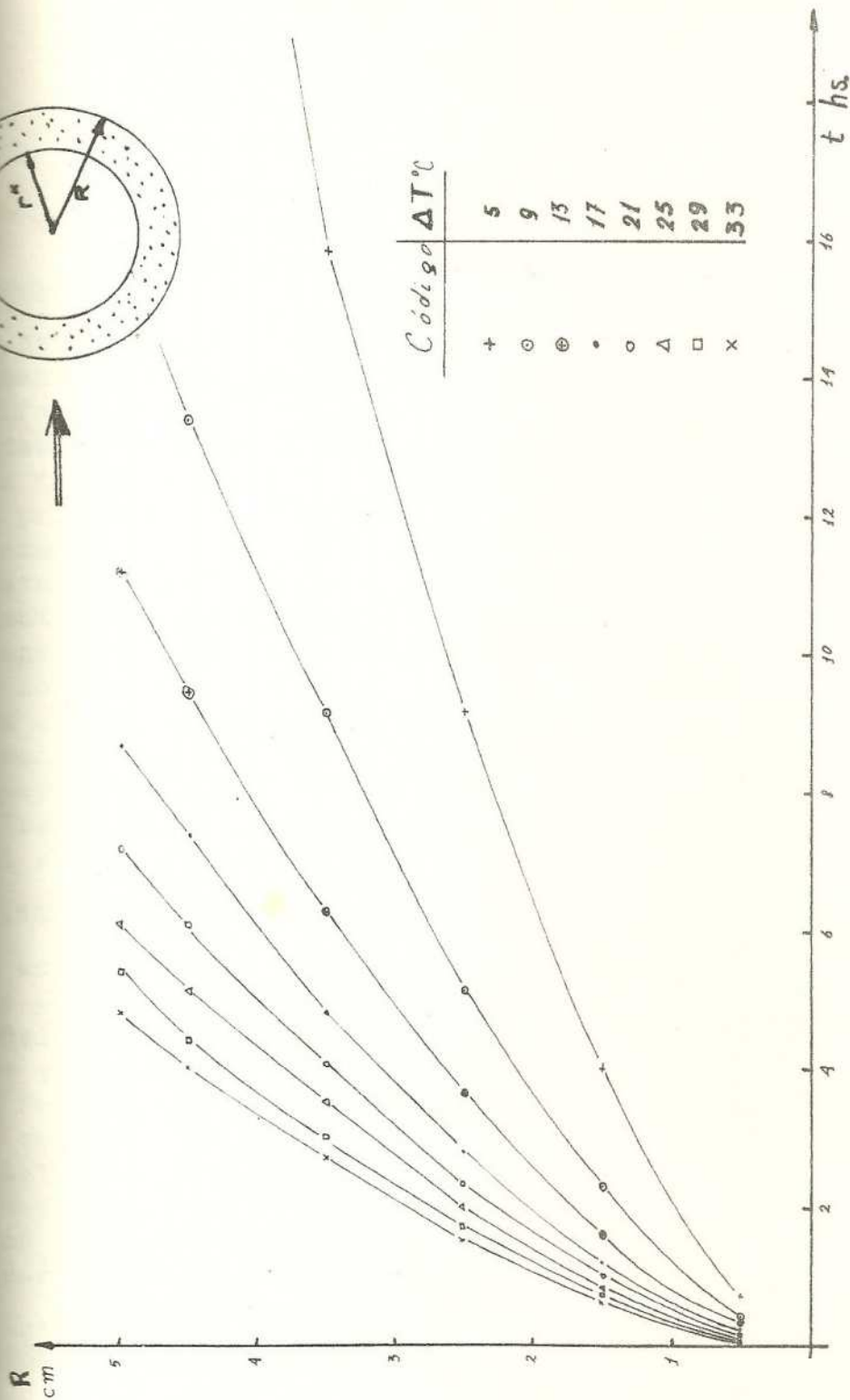
temperaturas que crecen con r en algunas zonas próximas al cambio de fase, en lugar de ser siempre decrecientes.

*son las raíces positivas de la ecuación:

$$\alpha J_1(\alpha) - \frac{hR}{k} J_0(\alpha) = 0$$



Distribución de temperatura en un acumulador con cambio de fase FIGURA 1



Tiempo calculado para la solidificación de un elemento de radio R , dada, para distintos $\Delta T = T^* - T_p$.

FIGURA 2