

MODELO DE ESTELA VORTICOSA FIJA DE UN ROTOR EOLICO DE EJE HORIZONTAL

Ricardo A. Prado¹, Andrés S. Rodríguez²

Departamento de Mecánica Aplicada
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue
calle Buenos Aires No.1400, (8300) Neuquén
tel.(099) 42-2836, fax (099) 42-4874

RESUMEN

Se formula un modelo potencial para la representación de la estela vorticiosa de una turbina eólica de eje horizontal que rota a velocidad angular constante y se halla embestida por un viento coaxial uniforme. El modelo de estela propuesto presenta una configuración fija formada por un sistema de hilos vorticosos helicoidales de radios no constantes dado que estos filamentos vorticosos se expanden a medida que se desarrollan corriente abajo desde el rotor. El campo inducido por este sistema vorticoso es determinado por la aplicación de la ley de Biot-Savart y calculado mediante la implementación del método de integración numérica de Gauss-Legendre.

INTRODUCCION

En los métodos desarrollados para predecir la performance de turbinas eólicas, una adecuada modelización de la estela del rotor es requerida para representar con mayor precisión el campo del flujo alrededor de las palas, dado que dicho flujo determina las cargas aerodinámicas sobre las mismas. Modelos de estelas rígidas (o fijas) o de estelas que se deforman por propia influencia (denominadas libres) son establecidos de manera de adicionar en todo el campo fluidodinámico un flujo, denominado inducido, que debe sumarse vectorialmente al campo de velocidades originado por los efectos superpuestos de avance y rotación del aire. Dichos modelos, que varían en complejidad y requerimientos computacionales de cálculo, pueden considerar, o no, la expansión de la estela, la distorsión autoinducida y el enrollamiento en torbellinos marginales [1-4].

El presente modelo es representado por un sistema de hilos vorticosos de geometría predeterminada. La configuración de los hilos vorticosos es helicoidal y de longitud semi-infinita. Los filamentos vorticosos parten desde el borde de fuga de las palas de la turbina y se desarrollan corriente abajo, resultando contenidos en el tubo de corriente en expansión conformado por el aire que atraviesa el disco de la turbina y cuya geometría queda definida conociendo el porcentaje de reducción de velocidad sufrido por el viento al llegar al rotor.

El campo de velocidades inducidas desarrollado por el sistema vorticoso de la estela es calculado mediante la aplicación de la ley de Biot-Savart [5]. Así, el diferencial de velocidad inducida en un punto genérico, P, de coordenadas (x_p, y_p, z_p) debido a un hilo vorticoso de intensidad de circulación, Γ , constante, es dado por la expresión (1), donde ζ representa el vector dirigido al punto de cálculo P desde el elemento ds , diferencial de arco del filamento vorticoso, con coordenadas (x_e, y_e, z_e) , tal como se muestra en la Figura 1.

¹ PAD, Area Mecánica de los Fluidos. - ² AYP, Area Representación Gráfica.

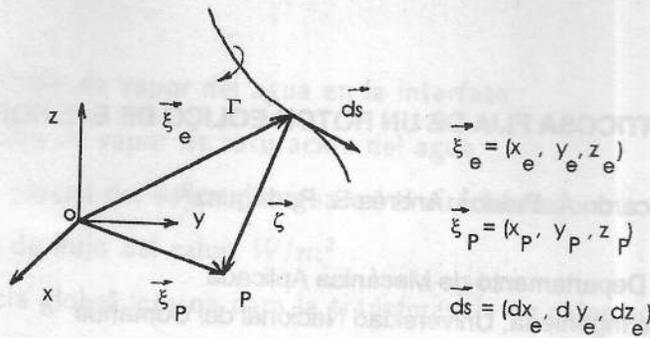


Figura 1

$$d\vec{V}_i(x_p, y_p, z_p) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{\zeta}}{|\vec{\zeta}|^3} \quad \text{donde} \quad \vec{\zeta} = \vec{\xi}_p - \vec{\xi}_e \quad (1)$$

La terna cartesiana inercial utilizada se ubica de manera que su origen de coordenadas coincida con la posición del centro del disco del rotor, estando el eje z(+) ubicado en coincidencia con el eje de rotación de la turbina y dirigido en la misma dirección que la del viento incidente.

Mediante la integración de la ley de Biot-Savart (1) a lo largo de la longitud de un hilo vorticoso de geometría e intensidad conocidas se determinan las distribuciones espaciales de las tres componentes cartesianas de la velocidad inducida (V_{ix} , V_{iy} , V_{iz}) en todo punto P. Dado que dicha integración no presenta en este caso una solución analítica, el correspondiente cálculo requiere de una evaluación numérica.

FORMULACION DEL MODELO DE ESTELA

Por entregar parte de su energía cinética a la turbina, el aire que fluye dentro del tubo de corriente que pasa a través del rotor va sufriendo una expansión pues se va retardando. En consecuencia, la velocidad del viento en el plano del rotor, V_o , es menor que la velocidad no perturbada del viento, V_∞ , siendo $V_o = V_\infty(1-a)$, donde a denota el coeficiente de reducción de velocidad en el disco del rotor, siendo $0 < a < 1$.

En el presente modelo se considera que el tubo de corriente envolvente del sistema vorticoso de la estela, τ , tiene una configuración fija dada por la superposición potencial de una corriente uniforme y una fuente puntual ubicada en coincidencia con el centro del disco del rotor [6]. Se obtiene entonces la expresión (2) para la variación de los radios locales del tubo de corriente τ , $r_\tau(z)$, a medida que el aire fluye a lo largo del eje z, donde R denota el radio de la turbina eólica.

$$r_\tau^2 - \frac{a \cdot z}{[z^2 + r_\tau^2]^{1/2}} R^2 = R^2 \quad -\infty < z < +\infty \quad (2)$$

La ecuación (2) es expandida en forma polinomial, resultando

$$r_\tau^6 + r_\tau^4(z^2 - 2R^2) + r_\tau^2(R^2 - 2z^2)R^2 + z^2(1-a^2)R^4 = 0 \quad (3)$$

Las configuraciones de dicho tubo de corriente son representadas en la Figura 2.a para valores típicos del coeficiente de reducción de velocidad, $a = 0,30$ y $a = 0,35$ [7,8].

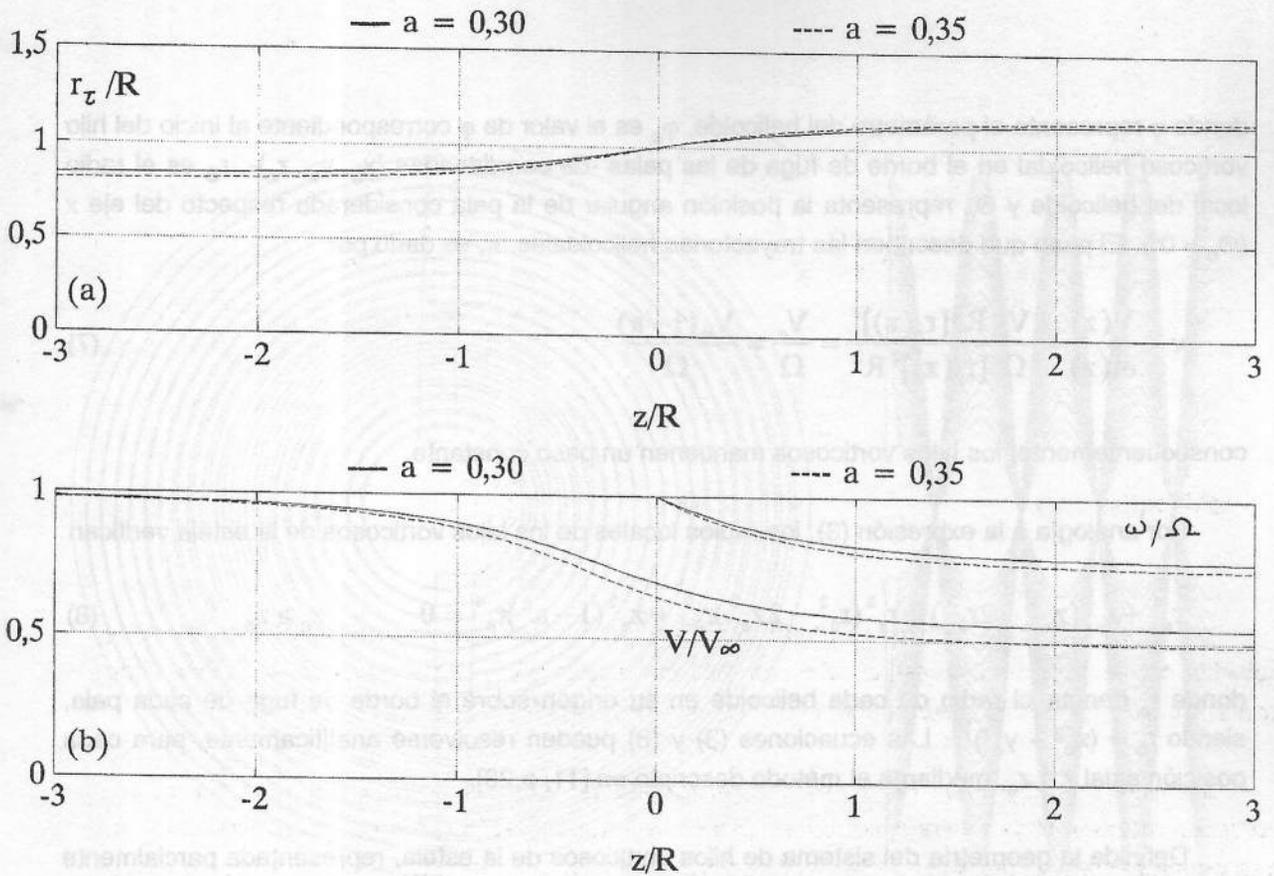


Figura 2

El aire que pasa a través del disco de la turbina eólica permanece dentro del tubo de corriente τ , el cual continúa expandiéndose a medida que el aire fluye corriente abajo de la posición del rotor. Por condición de continuidad, para un flujo incompresible, resulta

$$V_0 \cdot R^2 = V(z) \cdot [r_\tau(z)]^2 \quad (4)$$

y verificando asimismo la condición de conservación de la cantidad de movimiento angular dentro del tubo de corriente τ [9,10], resulta

$$\Omega \cdot R^2 = \omega(z) \cdot [r_\tau(z)]^2 \quad (5)$$

donde Ω representa la velocidad angular de rotación de la turbina, considerada constante, la cual solamente resulta impartida al aire que circula dentro del tubo de corriente τ desde el momento que éste atraviesa al disco de la turbina. Las distribuciones de las velocidades axiales, V , y angulares, ω , del aire que fluye dentro del tubo de corriente τ son representadas en la Figura 2.b, donde la velocidad axial del aire está adimensionalizada con la velocidad no perturbada del viento, V_∞ , y la velocidad angular del aire está adimensionalizada con la velocidad angular de rotación de la turbina eólica, Ω . Ambas distribuciones se representan para $a = 0,30$ y $a = 0,35$.

La visualización del flujo en la estela muestra que su conformación es helicoidal. En consecuencia, la geometría de los hilos vorticosos de la estela puede ser representada por

$$x_o = r_o \cdot \cos(\varphi + \Theta_o) \quad y_o = r_o \cdot \text{sen}(\varphi + \Theta_o) \quad z_o = z_o + \kappa(\varphi - \varphi_o) \quad \varphi_o \leq \varphi < \infty \quad (6)$$

donde φ representa el parámetro del helicoides, φ_0 es el valor de φ correspondiente al inicio del hilo vorticoso helicoidal en el borde de fuga de las palas -de coordenadas (x_0, y_0, z_0) -, r_e es el radio local del helicoides y Θ_0 representa la posición angular de la pala considerada respecto del eje x ($\Theta_0 = 0^\circ$). El paso que describen las trayectorias helicoidales, κ , es dado por

$$\kappa = \frac{V(z)}{\omega(z)} = \frac{V_0 R^2 [r_r(z)]^2}{\Omega [r_r(z)]^2 R^2} = \frac{V_0}{\Omega} = \frac{V_\infty(1-a)}{\Omega} \quad (7)$$

consecuentemente, los hilos vorticosos mantienen un paso constante.

Por analogía a la expresión (3), los radios locales de los hilos vorticosos de la estela verifican

$$r_e^6 + r_e^4(z_e^2 - 2r_0^2) + r_e^2(r_0^2 - 2z_e^2)r_0^2 + z_e^2(1-a^2)r_0^4 = 0 \quad z_e \geq z_0 \quad (8)$$

donde r_0 denota el radio de cada helicoides en su origen sobre el borde de fuga de cada pala, siendo $r_0 = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$. Las ecuaciones (3) y (8) pueden resolverse analíticamente, para cada posición axial z ó z_e , mediante el método descrito en [11, p.23].

Definida la geometría del sistema de hilos vorticosos de la estela, representada parcialmente en su vistas lateral y frontal en la Figura 3 para una turbina bipala, se determinan las componentes cartesianas del vector velocidad inducida para cualquier punto del campo fluidodinámico. Así, un hilo vorticoso genérico de intensidad de circulación unitaria que parte de las coordenadas (x_0, y_0, z_0) sobre la pala ubicada en la posición angular Θ_0 , induce en el punto P una velocidad dada por

$$\vec{V}_i(x_p, y_p, z_p) = C_1 \int_{\varphi_0}^{\infty} \vec{F}(r_e, r_0, \Theta_0, \varphi, x_p, y_p, z_p) d\varphi \quad (9)$$

donde C_1 es una constante y \vec{F} denota una función vectorial dependiente de la geometría del hilo vorticoso y de las coordenadas del punto P. Dado que el límite superior de integración es infinito, mediante un cambio de variable, la expresión (9) es transformada en una integral con límites definidos, pero cuyo integrando queda indeterminado para su límite superior. Así, proponiéndose el cambio de variable $tg(\eta) = \Delta z_e / r_0$ y resultando entonces $\eta_0 = \arctg(\Delta z_e / r_0)$, se tiene

$$\vec{V}_i(x_p, y_p, z_p) = C_2 \int_{\eta_0}^{\pi/2} \vec{G}(r_e, r_0, \Theta_0, \eta, x_p, y_p, z_p) d\eta \quad (10)$$

Una nueva transformación, $\lambda = 2(\eta - \eta_0) / (\pi/2 - \eta_0) - 1$, lleva a los límites de integración entre -1 y +1

$$\vec{V}_i(x_p, y_p, z_p) = C_3 \int_{-1}^{+1} \vec{H}(r_e, r_0, \Theta_0, \lambda, x_p, y_p, z_p) d\lambda \quad (11)$$

Esta última integral se calcula numéricamente mediante el método de integración de Gauss-Legendre [12], dado que dicho método presenta la ventaja de no necesitar evaluar el integrando en sus límites, sino en las raíces de los polinomios de Legendre, las cuales son reales, diferentes y se encuentran comprendidas en el intervalo abierto $(-1, +1)$.

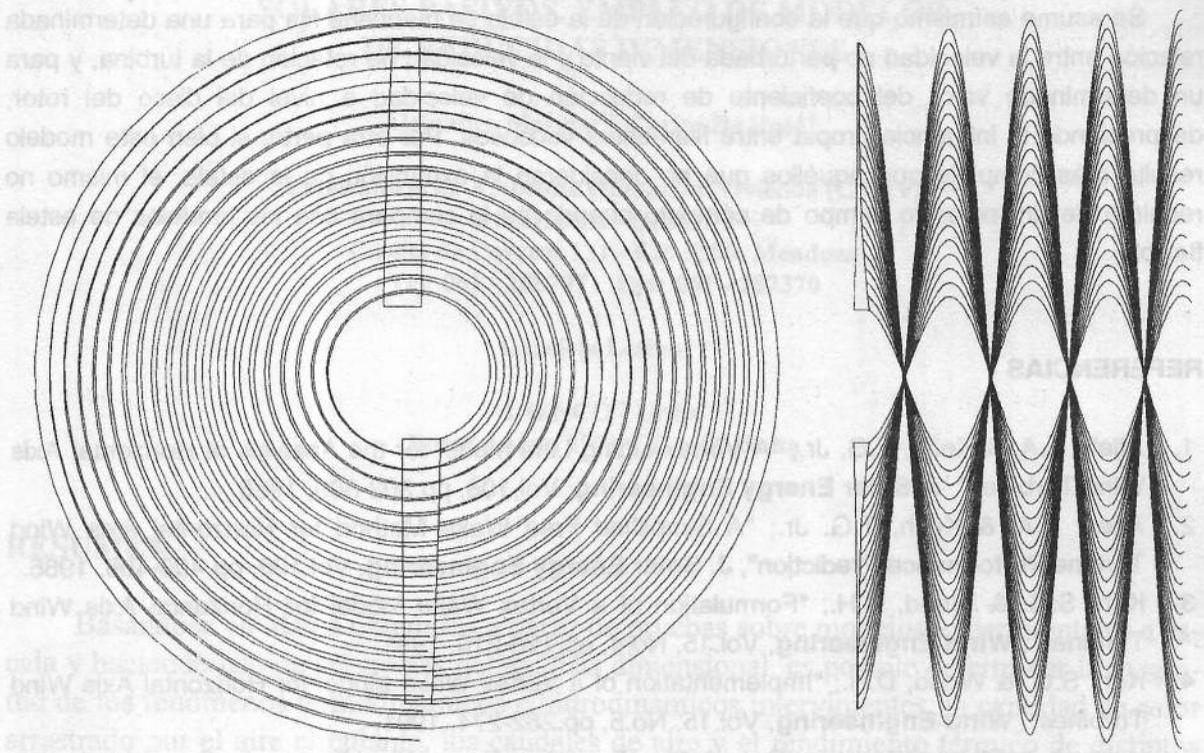


Figura 3

CONCLUSIONES

La completa representación del flujo alrededor de turbinas eólicas requiere tanto el modelado de las palas como de sus estelas. Estas últimas se originan no sólo por efectos viscosos (como continuación de las capas límites que se desarrollan sobre las palas) sino también porque las palas tienen una envergadura finita. El principal efecto de la estela es el de generar un campo de velocidades, denominado inducido y de origen no viscoso, que altera el flujo alrededor de las palas.

Se propone un modelo de estela estacionaria para turbinas eólicas de eje horizontal que considera la expansión de la misma a medida que el aire fluye corriente abajo desde el rotor. La estela está representada por una serie de hilos vorticosos helicoidales de radios no constantes, cuyas formulaciones potenciales responden a la ley de Biot-Savart. El presente modelo tiene como objetivo el conseguir una representación más real de las estelas vorticosas de las turbinas eólicas, dado que el efecto de expansión es observable y ha sido evaluado experimentalmente.

Si bien con considerables simplificaciones, este modelo pone de manifiesto las características básicas del flujo sobre un elemento sustentador de alargamiento finito, considerando la modificación de los ángulos de ataque con que incide el aire sobre las secciones de pala, respecto de los ángulos de incidencia correspondientes a un flujo estrictamente bidimensional.

Se asume asimismo que la configuración de la estela se mantiene fija para una determinada relación entre la velocidad no perturbada del viento y la velocidad de rotación de la turbina, y para un determinado valor del coeficiente de reducción de velocidad a nivel del disco del rotor, despreciando la influencia propia entre filamentos vorticosos. Por otra parte, si bien este modelo resulta más complejo que aquéllos que no consideran la expansión de la estela, el mismo no requiere de un excesivo tiempo de cómputo cuando se lo compara con los modelos de estela flexible.

REFERENCIAS

1. Afjeh, A.A. & Keith, T.G. Jr.; "A Vortex Lifting Line Model for the Analysis of Horizontal Axis Wind Turbines", **J. Solar Energy Engineering**, Vol.108, pp.303-309, 1986.
2. Afjeh, A.A. & Keith, T.G. Jr.; "A Simplified Free Wake Method for Horizontal Axis Wind Turbine Performance Prediction", **J. Solar Energy Engineering**, Vol.108, pp.400-406, 1986.
3. Koh, S.G. & Wood, D.H.; "Formulation of a Vortex Wake Model for Horizontal Axis Wind Turbines". **Wind Engineering**, Vol.15, No.4, pp.196-210, 1991.
4. Koh, S.G. & Wood, D.H.; "Implementation of a Vortex Wake Model for Horizontal Axis Wind Turbines". **Wind Engineering**, Vol.15, No.5, pp.262-274, 1991.
5. Katz, J. & Plotkin, A.; "Low-Speed Aerodynamics: From Wing Theory to Panel Methods", McGraw-Hill, Inc., pp.44-46, 1991.
6. Prado, R.A.; "Reformulación de la teoría de la cantidad de movimiento aplicada a turbinas eólicas", VI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Santiago de Chile, pp.723-728, 1994.
7. Wood, D.H.; "A Three-Dimensional Analysis of Stall-Delay on a Horizontal-Axis Wind Turbine", **J. Wind Eng. Indust. Aeodyn.**, Vol.37, pp.1-14, 1991.
8. Gould, J. & Fiddes, S.P.; "Computational Methods for the Performance Prediction of HAWT's", **J. Wind Eng. Indust. Aeodyn.**, Vol.39, pp.61-72, 1992.
9. Hunt, V.D.; "Windpower: A Handbook of Wind Energy Conversion Systems", Chapter 5: Applied Aerodynamics, pp.100-130, Van Nostrand Reinhold Company, Inc., 1981.
10. Eggleston, D.M. & Stoddard, F.S.; "Wind Turbine Engineering Design", Chapter 2: Rotor Aerodynamic Modelling, pp.15-65, Van Nostrand Reinhold Company, Inc., 1987.
11. Korn, G.A. & Korn Th.M.; "Mathematical Handbook for Scientist and Engineers", 2nd edition, McGraw-Hill Book Company, 1968.
12. Gordon, J.; "Algoritmos numéricos", La Plata, pp.107-115, 1985.